第28卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 3
2011年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0375-05

具任意次非线性项的非线性Klein-Gordon方程孤波解的轨道稳定性*

刘小华[1,2]， 张卫国[1]

(1- 上海理工大学理学院，上海 200093； 2- 贵州民族学院理学院，贵阳 550025)

摘 要: 具任意次非线性项的非线性Klein-Gordon方程是一类非常重要的物理模型，它的孤波解的轨道稳定性有着很好的物理意义．本文利用抽象的Grillakis轨道稳定性理论和谱分析，讨论具任意次非线性项的非线性Klein-Gordon方程的孤波解的轨道稳定性．当非线性项的系数以及波速满足一定的条件时，得出了其钟状孤波解总是不稳定的，而扭状孤波解总是稳定的．从而揭示了非线性项的系数以及波速对孤波解的稳定性所起的作用．

关键词: 非线性Klein-Gordon方程；轨道稳定性；孤波解；非线性项

分类号: **AMS**(2000) 35Q20; 35Q53; 35Q40 **中图分类号**: O175.2 **文献标识码**: A

1 引言

非线性Klein-Gordon方程是物理学中一类重要的模型方程，首先被Klein和Gordon[1]加以研究．更多精彩的内容可见[2-5]．但对于具任意次非线性项的非线性Klein-Gordon方程

$$u_{tt}-u_{xx}+b_1u+b_2u^{p+1}+b_3u^{2p+1}=0,\quad p>0 \tag{1}$$

的孤波解的轨道稳定性，讨论的文献较少，因此本文从此角度进行讨论．首先我们需要方程(1)的精确孤波解[6]为：设波速$\omega^2<1$，$b_1>0$，有

(a) 设$b_2<0$，若$b_3<0$或$b_3\le 0$，则(1)的钟状孤波解为

$$\phi_1=\Big[\frac{\mathrm{Asech}^2(k\xi)}{2+\mathrm{Bsech}^2(k\xi)}\Big]^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

(b) 设$b_2>0$，若p使$(z)^{\frac{1}{p}}$有意义(z为任一负数)，且$b_3<0$或$b_3\le 0$，则(1)的钟状孤波解为

$$\phi_2=\Big[\frac{A_2\mathrm{sech}^2(k\xi)}{2+B_2\mathrm{sech}^2(k\xi)}\Big]^{\frac{1}{p}},\quad A_2=-A,\quad B_2=-B-2. \tag{3}$$

(c) 设$b_2\ne 0$，$b_3>0$且p使$(-b_2b_3)^{\frac{1}{p}}$有意义，b_1, b_2, b_3满足

$$b_1=\frac{(p+1)b_2^2}{(p+2)^2b_3},$$

收稿日期: 2009-07-27. **作者简介**: 刘小华(1975年12月生)，女，博士，副教授．研究方向：孤立子理论．

***基金项目**: 国家自然科学基金(11071164)；上海市自然科学基金(10ZR1420800)；上海市重点学科建设项目(S30501).

则 (1) 的扭状孤波解为

$$\phi_3=\left\{A_3[1\pm\tanh(k\xi)]\right\}^{\frac{1}{p}},\quad A_3=-\frac{b_2(p+1)}{2b_3(p+2)},\tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}&A=\tfrac{|b_1|(p+2)\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2-b_1b_3(p+2)^2}},\quad B=-1+\tfrac{-b_2\sqrt{p+1}}{\sqrt{(p+1)b_2^2-b_1b_3(p+2)^2}},\\&k=\tfrac{p}{2}\sqrt{\tfrac{b_1}{1-\omega^2}},\quad \xi=x-\omega t,\end{aligned}\tag{5}$$

且方程 (1) 包含 Sinh-Gordon 方程的近似方程，ϕ^4 方程，Landau-Ginzburg-Higgs 方程，Duffing 方程以及非线性电报方程等作为其特例．因此，讨论方程 (1) 的孤波解的稳定性是有意义的．

2 验证方程 (1) 及其孤波解满足轨道稳定性理论的要求

方程 (1) 可写成哈密顿系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=JE'(\vec{u}),\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad v=u_t,\quad J=\begin{pmatrix}0&1\\-1,&0\end{pmatrix},\tag{6}$$

引入泛函

$$E(\vec{u})=\int_R\Big(\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{b_1}{2}u^2+\frac{b_2}{p+2}u^{p+2}+\frac{b_3}{2p+2}u^{2p+2}\Big)\mathrm{d}x,\quad Q(\vec{u})=\int_R u_xv\mathrm{d}x,\tag{7}$$

经简单计算有

$$E'(\vec{u})=\big(-u_{xx}+b_1u+b_2u^{p+1}+b_3u^{2p+1}v\big),$$

$$E''(\vec{u})=\begin{pmatrix}-\partial_{xx}+b_1+b_2(p+1)u^p+b_3(2p+1)u^{2p}&0\\0&1\end{pmatrix},\tag{8}$$

$$\tag{9}$$

以及

$$Q'(\vec{u})=\big(-v_x\ \ u_x\big),\quad Q''(\vec{u})=\begin{pmatrix}0&-\partial_x\\\partial_x&0\end{pmatrix}.\tag{10}$$

设 $X=H^1(R)\times L^2(R)$, $\vec{u}\in X$, X^* 为 X 的共轭空间，并引入内积

$$(\vec{u},\vec{v})=\int_R(u_1v_1+u_2v_2)\mathrm{d}x,\quad \vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.$$

定义自然恒等映射 $I:X\longrightarrow X^*$，且定义 X 与 X^* 间的配对 $\langle I\vec{u},\vec{v}\rangle=(\vec{u},\vec{v})$．容易验证 J 具有：1) 满射；2) 反对称 $J^*=-J$；3) $\langle Ju,u\rangle=0$．引入轨道 $O(\vec{\varphi}(\cdot))=\{\vec{\varphi}(\cdot-\omega y)\,|\,y\in R\}$ 称为 $\vec{\varphi}$-轨道．

$$\vec{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\partial_\xi\varphi_1,$$

φ_1 如 (2)-(5) 所示，显然 E, Q 在轨道下具有不变性.

定义 1[7] 设 $\vec{u}(t)(t\in[0,t_0],\ \vec{u}(0)=\vec{u}_0)$ 为方程 (1) 的解且能延拓到 $t\in[0,+\infty)$，所谓 $\vec{\varphi}$-轨道稳定指的是：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，如果 $\|\vec{u}_0-\vec{\varphi}(\cdot-cy)\|<\delta$，则

$$\sup_{0\le t<\infty}\inf_{y\in R}\left\|\vec{u}(t)-\vec{\varphi}(\cdot-cy)\right\|<\varepsilon,$$

否则称 $\vec{\varphi}$-轨道不稳定.

根据文献 [5] 易得知方程 (1) 存在唯一全局解 $\vec{u}(t)$，且满足 $E(\vec{u}(t))=E(\vec{u}_0)$，$Q(\vec{u}(t))=Q(\vec{u}_0)$. 容易验证系统 (6) 的非零解 $\vec{\varphi}$ 满足 $E'(\vec{\varphi})-\omega Q'(\vec{\varphi})=0$，称 $\vec{\varphi}$ 为有界态解，为突出 ω 的作用时也将其记为 $\vec{\varphi}_\omega$，本文主要讨论有界态解的稳定性. 引入算子 $H_\omega=E''(\vec{\varphi}_\omega)-\omega Q''(\vec{\varphi}_\omega)$，$\vec{\varphi}_\omega$ 为有界态解.

引理 1 算子 H_ω 仅存在一个负的简单特征值，其核由 $\partial_\xi\vec{\varphi}_\omega$ 所生成，其它谱为正，有界且远离于零.

证明 考虑 $E'(\vec{\varphi})-\omega Q'(\vec{\varphi})=0$ 在有界态解处的线性化算子并记为 L_ω，经计算有

$$L_\omega=(\omega^2-1)\partial_{\xi\xi}+b_1+b_2(p+1)\varphi_{1\omega}^p+b_3(2p+1)\varphi_{1\omega}^{2p},$$

由于 $L_\omega(\partial_\xi\varphi_{1\omega})=0$，这点可以通过 $E'(\vec{\varphi})-\omega Q'(\vec{\varphi})=0$ 两边对 ξ 求导得以验证. 所以 L_ω 的核由 $\partial_\xi\varphi_{1\omega}$ 所生成，因为 $\partial_\xi\varphi_{1\omega}$ 在 $\xi=0$ 具有简单零点，所以 L_ω 仅有一个负特征值 $-\alpha_\omega^2$ 以及相应的特征函数 χ_ω，即 $L_\omega\chi_\omega=-\alpha_\omega^2\chi_\omega$，记 $\vec{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ 为 H_ω 对应于特征值 λ 的特征向量，即 $H_\omega\vec{\psi}=\lambda\vec{\psi}$. 于是由 (8), (9) 有

$$\begin{cases}-\partial_{\xi\xi}\psi_1+b_1\psi_1+b_2(p+1)\varphi_{1\omega}^p\psi_1+b_3(2p+1)\varphi_{1\omega}^{2p}\psi_1+\omega\partial_\xi\psi_2=\lambda\psi_1,\\ -\omega\partial_\xi\psi_1+\psi_2=\lambda\psi_2,\end{cases}\tag{11}$$

当 $\lambda\neq 1$，(10) 式可以改写成

$$\begin{cases}L_\omega\psi_1=\frac{\lambda(1-\omega^2)-\lambda^2}{1-\lambda}\psi_1,\\ \psi_2=\frac{-\omega}{\lambda-1}\partial_\xi\psi_1.\end{cases}$$

假设 $\lambda<0$，则由 L_ω 仅有一个负的特征值与一元二次方程根与系数的关系知方程 $\lambda^2-(1-\omega^2-\alpha_\omega^2)\lambda-\alpha_\omega^2=0$ 仅存在一个负根，因此 H_ω 存在唯一负特征值. 由 $L_\omega\partial_\xi\varphi_{1\omega}=0$ 以及 $\varphi_{2\omega}=\omega\partial_\xi\varphi_{1\omega}$，可以验证 $H_\omega\partial_\xi\vec{\varphi}_\omega=\vec{0}$，所以 H_ω 的核由 $\partial_\xi\vec{\varphi}_\omega$ 所生成. 根据本性谱的 Wely 定理知 H_ω 的其它正谱有界且远离于零.

注 1 此引理中 $\varphi_{1\omega}$ 由式(2), (3), (5) 所示，对 $\varphi_{1\omega}=\phi_3$ 不适用，理由是 $\partial_\xi\phi_3$ 在 $\xi=0$ 不再具有简单零点，因此我们将另加讨论.

设 $d(\omega)=E(\vec{\varphi}_\omega)-\omega Q(\vec{\varphi}_\omega)$，由引理 1 及文献 [7] 中的定理 3.5 及定理 4.7 可知有以下引理.

引理 2 如果 $d''(\omega)>0$，则对应的 $\vec{\varphi}_\omega$-轨道是稳定的；如果 $d''(\omega)<0$，则对应的 $\vec{\varphi}_\omega$-轨道是不稳定的.

3 方程 (1) 的孤波解的轨道稳定性

引入函数 $d(\omega)=E(\vec{\varphi}_\omega)-\omega Q(\vec{\varphi}_\omega)$，易有

$$d''(\omega)=-\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi-\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\Big[\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi\Big],\tag{12}$$

显然上式中的第一项为负，故只需讨论第二项的符号.

情形1　设条件如(2),(5)所示，此时

$$\varphi_{1\omega}=\phi_1=\Big[\frac{A\mathrm{sech}^2(k\xi)}{2+B\mathrm{sech}^2(k\xi)}\Big]^{\frac{1}{p}},$$

所以

$$\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi=-\frac{16A^2k}{p^2}\int_0^{+\infty}\Big[\frac{A\mathrm{sech}^2y}{2+B\mathrm{sech}^2y}\Big]^{\frac{2-2p}{p}}\frac{(1-\mathrm{sech}^2y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{sech}^2y}{(2+B\mathrm{sech}^2y)^4}\mathrm{dsech}^2y.$$

令$t=\mathrm{sech}^2y$以及积分第一中值定理知，存在$t^*\in(0,1)$，有

$$\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi=\frac{16A^{\frac{2}{p}}k}{p^2}(2+Bt^*)^{-\frac{2+2p}{p}}\int_0^1t^{\frac{2-p}{p}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,\tag{13}$$

将$t=\sin^2\alpha$代入上式中的定积分并根据根据递推公式$I(\frac{4-p}{p})=\frac{4+p}{4}I(\frac{4+p}{p})$，可以推导出

$$\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi=\frac{8A^{\frac{2}{p}}k}{p}(2+Bt^*)^{-\frac{2+2p}{p}}I\Big(\frac{4+p}{p}\Big),\tag{14}$$

其中

$$I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\alpha\mathrm{d}\alpha,$$

由(5)知上式只有k与ω有关，故经简单计算有

$$\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi=\frac{8A^{\frac{2}{p}}}{p}(2+Bt^*)^{-\frac{2+2p}{p}}I\Big(\frac{4+p}{p}\Big)\omega^2\frac{p\sqrt{b_1}}{2\sqrt{(1-\omega^2)^3}},\tag{15}$$

经简单分析有

$$A>0,\quad 1<2+Bt^*<2,\quad p>0,\quad I\Big(\frac{4+p}{p}\Big)>0,$$

故(14)式大于零，从而(11)式的第二项为负，所以$d''(\omega)<0$，由引理2知$\vec{\varphi}_\omega$-轨道(即孤波解ϕ_1)不稳定.

情形2　设条件如(3),(5)所示，此时

$$\varphi_{1\omega}=\phi_2=\Big[\frac{A_2\mathrm{sech}^2(k\xi)}{2+B_2\mathrm{sech}^2(k\xi)}\Big]^{\frac{1}{p}},\quad A_2=-A,\quad B_2=-B-2,$$

由式(14)可以得出存在$t_1^*\in(0,1)$，使得

$$\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int_R(\partial_\xi\varphi_{1\omega})^2\mathrm{d}\xi=\frac{8(-A)^{\frac{2}{p}}}{p}(2-2t_1^*-Bt_1^*)^{-\frac{2+2p}{p}}I\Big(\frac{4+p}{p}\Big)\omega^2\frac{p\sqrt{b_1}}{2\sqrt{(1-\omega^2)^3}},\tag{16}$$

类似情形1的分析有(11)式的第二项为负，所以$d''(\omega)<0$，此时$\vec{\varphi}_\omega$-轨道(即孤波解ϕ_2)不稳定. 由情形1与2有本文的重要结论.

定理1　设波速$\omega^2<1$, $b_1>0$，则:

1)　若$b_3<0$或$b_3\le0$且$b_2<0$，则如(2),(5)所示的钟状孤波解ϕ_1不稳定;

2)　若p使得$(z)^{\frac{1}{p}}$有意义(z为任意负数)，且$b_3<0$或$b_3\le0$且$b_2>0$，则如(3),(5)所示的钟状孤波解ϕ_2不稳定.

下面讨论扭状孤波解 ϕ_3 的稳定性.

定理2 设条件如 (4), (5) 所示. 此时如果算子 H_ω 的核由 $\partial_\xi\vec{\varphi}_\omega$ 所生成，其它谱为正，有界且远离于零，则孤波解 ϕ_3 轨道稳定.

证明 当 ξ 从零变化到 u_0，其中 u_0 满足 $b_1u+b_2u^{p+1}+b_3u^{2p+1}=0$，$\partial_\xi\phi_3$ 单调变化，$\partial_\xi\phi_3$ 在 $\xi=0$ 处不等于零，因此 $\partial_\xi\phi_3$ 是算子 L_ω 的特征值为零对应的最小的特征函数，$L_\omega\geq 0$，根据式 (10) 与算子 H_ω 的表达式知算子 H_ω 不具备负的特征值. 由引理1有算子 H_ω 的核由 $\partial_\xi\vec{\varphi}_\omega$ 所生成，其它谱为正，有界且远离于零. 利用文献 [7] 中定理1有孤波解 ϕ_3 轨道稳定.

参考文献：

[1] Sakurai J J. Advanced Quantum Mechanics[M]. New York: Addison Wesley, 1967

[2] Lee I J. Numerical solution for nonlinear Klein-Gordon equation by collocation method with respect to spectral method[J]. Journal of Korean Mathematical Society, 1995, 32(3): 541-551

[3] 蒋毅，孟宪良，蒲志林. 三维空间中的 Klein-Gordon-Zakharov 方程 Jacobi 椭圆函数周期解[J]. 工程数学学报，2008, 25(4): 719-723
Jiang Y, Meng X L, Pu Z L. Elliptic function periodic solution of Klein-Gordon-Zakharov equation in the three-dimensional space[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(4): 719-723

[4] Fan D, Zhong S. Global solutions for nonlinear Klein-Gordon equations in infinite homogeneous wave guides[J]. Journal of Diffiential Equation, 2006, 231: 212-234

[5] Ginibre J, Velo G. The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation[J]. Mathematical I, 1985, 189: 487-505

[6] 张卫国，常谦顺，李用声. 具任意次非线性项的 Liénard 方程的精确解及其应用[J]. 数学物理学报，2005, 25A(1): 119-129
Zhang W G, Chang Q S, Li Y S. Explicit exact solutions for Liénard equation with nonlinear terms of any degree and its applications[J]. Acta Mathematica Scientia, 2005, 25A(1): 119-129

[7] Grillakis M, Jalah Shatah. Walter strauss, stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I[J]. Journal of Functional Analysis, 1987, 74: 160-197

The Orbital Stability of Solitary Solutions to the Nonlinear Klein-Gordon Equation with Nonlinear Terms of any Degree

LIU Xiao-hua[1,2], ZHANG Wei-guo[1]

(1- School of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093;
2- School of Science, Guizhou University for Nationalities, Guiyang 550025)

Abstract: The nonlinear Klein-Gordon equation with nonlinear terms of any degree is a very important model in physics, the orbital stability of its solitary wave solutions has a very good physical implication. In this paper, the authors discuss the orbital stability of solitary wave solutions to the nonlinear Klein-Gordon equation with nonlinear terms of any degree, by applying the abstract results of Grillakis orbital theory and detailed spectral analysis. When the coefficients of nonlinear terms and the wave velocity satisfy some conditions, we obtain that its bell solitary wave solutions are unstable and the kink solitary wave solution is stable. So we show that the orbital stability of solitary wave solutions depends on the the coefficients of nonlinear terms and the wave velocity to some extent.

Keywords: nonlinear Klein-Gordon equation; orbital stability; solitary wave solution; nonlinear terms

Received: 27 July 2009. **Accepted:** 17 Mar 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11071164); the Natural Science Foundation of Shanghai Municipality (10ZR1420800); the Leading Academic Discipline Project of Shanghai Municipality (S30501).